



桩自重对桩弯曲的影响

TU 473.1

朱少云

(南京林业大学土木工程学院 南京 210037)

摘要 从理论角度出发, 建立有轴向分布力(自重)作用的桩的挠曲方程, 推出了半无限长桩考虑自重影响的精确解。显示了忽略桩自重引起的设计误差。为实际工程中忽略桩自重的设计方法提供了理论依据。

关键词 长桩; 自重; 分布荷载; 挠曲方程; 桩弯曲; 高桩码头。

中图分类号 TU 973 文献标识码 A 文章编号 1000-2006(2000)01-0056-03

The Effect of the Pile's Deed Weight on Its Metamorphosis

Zhu Shaoyun

(College of Civil Engineering Nanjing Forestry University Nanjing 210037)

Abstract It is widely agreed that pile's deed weight can be ignored in design. In term of theoretical analysis, this paper puts forward the load-deflection equation of high pile with its deed weight considered. On the equation, the accurate analytic formulas of pile's internal force and deformation are driven, which can be used to study the effect of pile's deed weight on its metamorphosis. At last, an example is given to show the errors brought about by ignoring pile's deed weight in design. The calculate result provides a reference for pile's analysis and design.

Key words High pile; Deed weight; Axial uniformly distributed load; Load-deflection equation

高桩码头在桩的设计和施工中, 一般不考虑土中桩自重对桩弯曲的影响。目前, 高桩码头正朝着粗桩、长桩、大跨度的方向发展, 由于桩自重、长度的增加, 桩自重的影响是否可以忽略不计已成为一个有待验证的问题。笔者将用桩的挠曲微分方程推论桩自重对桩弯曲的影响。

1 桩自重对垂直桩弯曲的影响

选择地面桩轴中心处为坐标轴原点, 取桩的中心轴及与中心轴相垂直的方向为 x 轴及 y 轴, x 、 y 坐标分别为桩的深度和挠度。桩单元体 dx 的受力情况见图 1, 图 1 中 M 、 N 、 S_v 分别为作用在单元体上下断面的弯矩、轴力和剪力, \bar{N} 为单位长度上的竖向荷载。设桩的正向上作用有单位长度的分布荷载 $\bar{q}(x)$, $\bar{p}(x, y)$ 为桩周表面任意点的反力, 由单元体垂直方向力之和为零得

$$(N + dN) - N - \bar{N}dx = 0, \quad \frac{dN}{dx} = \bar{N}$$

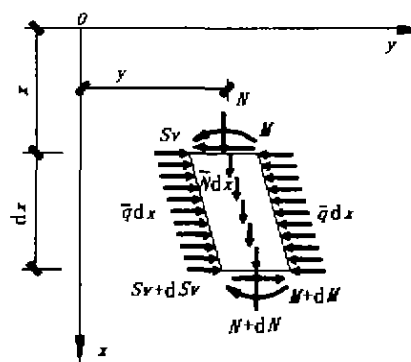


图 1 桩单元体受力状况

Fig.1 Force state of pile element

收稿日期 1999-06-08

第一作者简介: 朱少云, 女, 南京林业大学土木工程学院讲师。



由单元体水平方向力之和为零得:

$$(S_v + dS_v) - S_v + \bar{p} dx - \bar{q} dx = 0, (\bar{p} - \bar{q}) = \frac{dS_v}{dx}$$

由单元体力矩平衡得:

$$(M + dM) - M - N dy - S_v dx = 0$$

以 $M = -EI(\frac{d^2 y}{dx^2})$, $\bar{p} - \bar{q} = \frac{dS_v}{dx}$, $\bar{N} = \frac{dN}{dx}$ 代入式(1)得:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \bar{N} \frac{dy}{dx} + \bar{p} = \bar{q}$$

上式(2)为有轴向分布力作用的桩的挠曲方程。为简便起见, 假定地基反力为常数, 埋入长度半无限长。

桩的挠曲方程为:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \bar{N} \frac{dy}{dx} + Bk_h y = 0$$

式中, E 为桩材料的弹性模量, I 为桩的惯性矩, k_h 为水平方向地基反力系数, B 为桩的宽度。其特征方程为

$$m^4 + dm + f = 0$$

其中, $f = \frac{Bk_h}{EI}$; $d = \frac{\bar{N}}{EI}$

特征解为 $m_{1,2} = -\frac{\sqrt{X}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{X + 2\sqrt{X^2 - 4e}} = -r \pm ai$

$$m_{3,4} = \frac{\sqrt{X}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-X + 2\sqrt{X^2 - 4e}} = r \pm \sqrt{a'}$$

式中, $r = \frac{\sqrt{X}}{2}$; $a = \frac{1}{2} \sqrt{X + \sqrt{X^2 - 4f}}$; $X = 2\sqrt[3]{R} \cos \beta$; $R = \sqrt{\frac{64f^3}{27}}$; $\beta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{d^2}{2R} \right)$

当 $\alpha > 0$ 时, 方程通解为:

$$y = C_1 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{m_3 x} + C_4 e^{m_4 x}$$

式中, C_1, C_2, C_3, C_4 为待定积分常数;

当 $\alpha < 0$ 时, 则 $m_{3,4} = r \pm \sqrt{-\alpha}$, 此时方程通解为:

$$y = C'_1 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C'_2 e^{-\alpha x} \sin \alpha x + C'_3 e^{\alpha x} \cos \sqrt{-\alpha} x + C'_4 e^{\alpha x} \sin \sqrt{-\alpha} x$$

式中 C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 为待定积分常数, 由边界条件, $x \rightarrow \infty$ 时, $M \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ 得 $C_3 = C_4 = 0$

所以

$$y = e^{-\alpha x} (C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x)$$

$$y' = e^{-\alpha x} [C_1 (-r \cos \alpha x - a \sin \alpha x) + C_2 (a \cos \alpha x - r \sin \alpha x)]$$

$$y'' = e^{-\alpha x} \{ C_1 [(r^2 - a^2) \cos \alpha x + 2ra \sin \alpha x] + C_2 [-2ra \cos \alpha x + (r^2 - a^2) \sin \alpha x] \}$$

$$y''' = e^{-\alpha x} \{ C_1 [(3a^2 r - r^3) \cos \alpha x + (a^3 - 3r^2 a) \sin \alpha x] + C_2 [3r^2 a - r^3) \cos \alpha x + (3ra^2 - r^3) \sin \alpha x] \}$$

如果在地表面作用有水平力 H_0 及弯矩 M_0 , 则由边界条件 $S_{v_{x=0}} = H_0, M_{x=0} = M_0$ 得

$$S_{v_{x=0}} = \frac{dM}{dx} - N \frac{dy}{dx} = -EI y''' = -H_0$$

$$M_{x=0} = -EI y'' = -M_0$$

积分常数可由下列各式求得:

$$C_1 = \frac{2r}{(a^2 + r^2)^2} \cdot \frac{H_0}{EI} + \frac{3r^2 - a^2}{(a^2 + r^2)} \cdot \frac{M_0}{EI}$$

$$C_2 = \frac{r^2 - a^2}{a(r^2 + a^2)} \cdot \frac{H_0}{EI} - \frac{r(3a^2 - r^2)}{a(a^2 + r^2)} \cdot \frac{M_0}{EI}$$

挠度 y , 转角 θ , 弯矩 M , 剪力 S_v 可表示如下:

$$y = \frac{e^{-\alpha x}}{(a^2 + r^2)^2} \left\{ \frac{H_0}{EI} (2ra \cos \alpha x + \frac{r^2 - a^2}{2} \sin \alpha x) + \frac{M_0}{EI} \left[(3r^2 - a^2) \cos \alpha x - \frac{r(3a^2 - r^2)}{a} \sin \alpha x \right] \right\}$$



$$\theta = \frac{-e^{-\alpha x}}{(\alpha^2 + r^2)^2} \left\{ \frac{H_0}{EI} \left[(-2r^3 - 2ra^2) \cos \alpha x + (-rx - \frac{r^3}{\alpha} \sin \alpha x) \right] + \frac{M_0}{EI} \left[(-2\gamma^3 - 2ra^2) \cos \alpha x + (\alpha^3 + \frac{r^4}{\alpha} - 3r^2a + 3ra^2) \sin \alpha x \right] \right\}$$

$$M = \frac{-e^{-\alpha x}}{(\alpha^2 + r^2)^2} \left\{ H_0 \frac{(r^2 + a^2)^2}{a} \sin \alpha x + M_0 \left[(r^2 + a^2) \cos \alpha x + \frac{r}{a} (r^2 - a^2) \sin \alpha x \right] \right\}$$

$$S_v = \frac{-e^{-\alpha x}}{(\alpha^2 + r^2)^2} \left\{ H_0 \left[(r^2 + a^2) \cos \alpha x - \frac{r}{a} (r^2 + a^2) \sin \alpha x \right] + M_0 \left[(-a^6 - r^6 - 6r^2a^4) \sin \alpha x \right] \right\}$$

(1) 当桩头固定时, 由 $\theta_{x=0} = 0$, 得 $M_0 = \frac{H_0}{2r}$, 不考虑轴向力、轴向分布力时, $M'_0 = \frac{H_0}{2\beta}$, 弯矩之比为 $\eta = \frac{\beta}{r}$;

(2) 桩头自由且仅作用有水平力时, 设 $M = 0$, 由 $S_v = 0$ 得出产生最大弯矩时深度 $l_m = \frac{1}{\alpha} \text{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\gamma}$, 最大弯矩为 $M_{\max} = -\frac{H_0}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \exp(-\frac{\gamma}{\alpha} \text{tg}^{-1} \frac{\alpha}{\gamma})$ 。

2 桩自重对斜桩弯曲的影响

设轴与垂直面夹角为 ρ , 则桩的挠曲微分方程为:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + \bar{N} \cos \rho \frac{dy}{dx} + (Bk_h + \bar{N} \sin \rho) y = 0$$

令 $\frac{\bar{N}}{EI} = d, \frac{Bk_h}{EI} + \frac{\bar{N} \sin \rho}{EI} = f$, 桩挠度曲线、 θ 、 M 、 S_v 表达式同前。

例: 预应力混凝土桩, 直径 600 mm, $EI = 2.04 \times 10^{14} \text{ kN} \cdot \text{mm}^2$, $k_h = 5.0 \times 10^{-3} \text{ kN/mm}^3$

(1) 设 $N = 1500 \text{ kN}$, 则当桩头自由时, $\eta = 1.07(7\%)$; 当桩头固定时, $\eta = 1.02(2\%)$;

(2) $N = 0$, 考虑自重 $\bar{N} = 7.068 \text{ kN/cm}$, 则当桩头自由时, $\eta = 1.01(1\%)$; 当桩头固定时, $\eta = 1.0013(0.13\%)$;

(3) $N = 0$, 桩与垂直面夹角 $\rho = 15^\circ$, 则当桩头自由时, $\eta = 1.015(1.5\%)$;

当桩头固定时, $\eta = 1.0025(0.26\%)$

由以上推导可知, 泥面以下桩的自重对桩弯曲影响很小, 均在 2% 以内, 故可忽略不计。

参 考 文 献

- [1] 横山幸满著. 桩结构物的计算方法和计算实例. 唐业清, 吴庆荪译. 北京: 人民交通出版社, 1984
- [2] 胡人礼. 桥梁桩基础分析和设计. 北京: 中国铁道出版社, 1987
- [3] 卢世深, 林亚超. 桩基础的计算和分析. 北京: 人民交通出版社, 1987
- [4] 杨克己, 韩理安编著. 桩基工程. 北京: 人民交通出版社, 1992
- [5] H G Poulos, E H Davis. Pile Foundation Analysis and Design. New York: Wiley, 1980

(责任编辑 李燕文)